FUNZIONI

Dati due insiemi non vuoti A e B, si dice <u>funzione</u> o <u>applicazione</u> $f: A \to B$ (si legge "effe da A in B") una relazione associata ad A e B tale che ad ogni elemento $x \in A$ fa corrispondere uno e un solo elemento $y \in B$. In questo caso, per indicare $(x, y) \in f$ (oppure $x f y$) si scrive direttamente $\boxed{y = f(x)}$.

N.B.: Ho scritto $(x, y) \in f$ ed $x f y$ per mettere in evidenza che una funzione è una particolare relazione (e sono notazioni <u>corrette</u>, ma che <u>NON SI USANO</u> NELLA PRATICA, quando f è una <u>funzione</u>: si usa, per l'appunto, $y = f(x)$). L'insieme A si chiama <u>dominio</u> di f; l'insieme B si chiama <u>INSIEME DEI VALORI</u> di f.

N.B.: Il GRAFICO di una funzione $f: A \to B$ è l'insieme

$$Gr(f) = \{(x, y) : y = f(x), x \in A, y \in B\}.$$

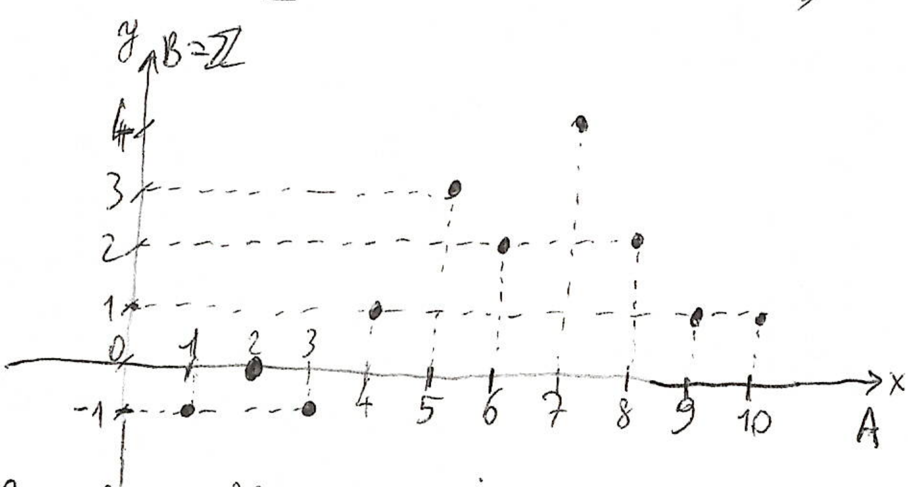
similmente come il GRAFICO di una relazione associata ad A e B è l'insieme

$$Gr(\mathcal{R}) = \{(x, y) : (x, y) \in \mathcal{R}, x \in A, y \in B\}.$$

Il concetto di funzione, molto spesso, nasce dallo studio dell'osservazione dei fenomeni in natura e in tantissime branche delle Scienze ed anche delle altre aree del sapere umano. Per esempio, vogliamo misurare la temperatura di una stessa località alle ore 12 di dieci giorni consecutivi (temperatura in gradi Celsius, °C, che viene arrotondata al numero intero più vicino).

Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ l'insieme dei 10 giorni considerati. Quindi ad ogni giorno corrisponde un solo numero (la nostra temperatura "arrotondata") dell'insieme $\mathbb{Z}$.

x	$f(x)$
1	-1
2	0
3	-1
4	1
5	3
6	2
7	4
8	2
9	1
10	1



Il grafico della nostra funzione "temperatura" è costituito da tutti i punti evidenziati con ● nella figura.

Siccome ad ogni elemento $x \in A$ corrisponde uno e un solo elemento di B, allora non può succedere che esistano due punti aventi la stessa ascissa x e due ordinate diverse, cioè del tipo (x, y_1) ed (x, y_2), che appartengano entrambi al grafico di f, perché al punto x è associato uno e un solo valore (non è possibile associare al punto x sia y_1 sia y_2 contemporaneamente). Invece dal grafico si vede (e questo è possibile, per una funzione) che c'è più di un punto che ha la stessa ordinata y e almeno due ascisse diverse, cioè del tipo (x_1, y) ed (x_2, y), che appartiene al grafico di f. Tali punti sono i punti: $(1, -1)$ e $(3, -1)$; $(4, 1)$, $(9, 1)$ e $(10, 1)$; $(6, 2)$ e $(8, 2)$. A questo punto, per descrivere più in generale questa cosa, introduciamo i concetti di iniettività e di non-iniettività.

Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione. $\boxed{-559-}$

Si dice che f è <u>iniettiva</u> se non esistono due punti <u>distinti</u> $a_1, a_2 \in A$ tali che $f(a_1) = f(a_2)$.
Si dice che f è <u>NON-INIETTIVA</u> se esistono due punti <u>distinti</u> $a_1, a_2 \in A$ tali che $f(a_1) = f(a_2)$, cioè due punti <u>diversi</u> a_1, a_2 che hanno la stessa immagine (ossia se esistono due punti distinti del grafico di f che hanno la stessa ordinata). Dalla definizione di iniettività data all'inizio di questa pagina è possibile dedurre che una funzione $f : A \to B$ è <u>iniettiva</u> se e solo se, per ogni coppia di elementi di A a_1, a_2 con $a_1 \neq a_2$, si ha che $f(a_1) \neq f(a_2)$ (cioè, ad elementi distinti corrispondono immagini distinte, e si può dedurre che una funzione $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se, per ogni coppia di elementi di A a_1, a_2 con $f(a_1) = f(a_2)$, si ha che $a_1 = a_2$. La funzione "temperatura" presentata nella pagina precedente è non-iniettiva perché esistono (almeno) due punti distinti, per esempio il punto 1 e il punto 3, appartenenti all'insieme A, tali che $\boxed{f(1) = f(3)} = -1$. Se però prendiamo la restrizione della stessa funzione "temperatura" all'insieme $A^* = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, cioè prendiamo $f : A^* \subset A \longrightarrow \mathbb{Z}$, definita ponendo

$A^* = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $\boxed{560}$ $f(2)=0$, $f(3)=-1$, $f(4)=1$, $f(5)=3$, $f(6)=2$, $f(7)=4$

$x \in A^*$	$f(x)$
2	0
3	-1
4	1
5	3
6	2
7	4

Siccome TUTTI gli elementi della colonna di $f(X)$ sono DISTINTI, allora non può succedere che esistano $a_1, a_2 \in A$ distinti tali che $f(a_1) = f(a_2)$ e quindi $f: A^* \subset A \to \mathbb{Z}$ è iniettiva (in A^*), cioè f, che non era iniettiva in A, diventa iniettiva in A^*.

Ora notiamo che il codominio di f si può definire in modo del tutto analogo a com'era stato definito il codominio di una relazione. Data $f: A \to B$ come sopra, con f funzione, si chiama codominio di f e si indica con $\mathrm{Im}\, f$ oppure $f(A)$, l'insieme $\{y \in B :$ esiste almeno un elemento $x \in A$ tale che $f(x) = y\}$. Notiamo che il codominio della funzione "temperatura" è l'insieme $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ (sia vista come funzione $f: \{1, 2, \dots, 10\} \to \mathbb{Z}$, sia vista come funzione $f: \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \mathbb{Z}$).

(N.B.: il dominio di una funzione $f: A \to B$ è tutto l'insieme A, e questo è "coerente" con la definizione di dominio di una relazione perché, per definizione di funzione, per ogni $x \in A$ esiste (almeno) un elemento $y \in B$ tale che $y = f(x)$, cioè $x f y$ oppure $(x, y) \in f$, nel caso in cui f viene considerata come una relazione)

"Collegato" con il codominio di una funzione, introduciamo ora il concetto di suriettività (e di non-suriettività) per una funzione $f: A \to B$.

$\boxed{561}$ Si dice che una funzione $f: A \to B$ è SURIETTIVA se per ogni $y \in B$ esiste almeno un elemento $x \in A$ tale che $f(x) = y$. Dalla definizione di codominio e di suriettività, non è difficile vedere che una funzione $f: A \to B$ è suriettiva se e solo se il codominio di f è esattamente uguale a B.

Ma facciamo ora degli esempi.

Consideriamo la funzione "temperatura", per semplicità $f: A^* = \{2,3,4,5,6,7\} \to \mathbb{Z}$. Questa funzione non è suriettiva (ricordiamo che $f(2)=0$, $f(3)=-1$, $f(4)=1$, $f(5)=3$, $f(6)=2$, $f(7)=4$): infatti esiste almeno un elemento $b \in \mathbb{Z}$ (per esempio, il numero 5, oppure il numero -2) tale che per nessun numero a appartenente ad A^* si ha che $f(a)=b$.

Quindi, per nessun $a \in A^*$ si ha che $f(a) = -2$.

Per nessun $a \in A^*$ si ha che $f(a) = 5$.

Dunque, considerata come funzione o applicazione $f: A^* \to \mathbb{Z}$, f non è suriettiva. Ma, proprio per definizione di funzione suriettiva e per definizione di codominio di una funzione, si ha che, se al posto di $\mathbb{Z}$ (guardare l'insieme che sta alla destra della freccia!!) si mette il codominio di f, allora la funzione f diventa AUTOMATICAMENTE suriettiva!! Infatti: il codominio di f è $\{-1,0,1,2,3,4\}$, e

Consideriamo $f : A^* = \{2,3,4,5,6,7\} \longrightarrow \{-1,0,1,2,3,4\}$ sempre definita ponendo $f(2)=0$, $f(3)=-1$, $f(4)=1$, $f(5)=3$, $f(6)=2$, $f(7)=4$ (lo riscriviamo per ragioni di chiarezza). Si può vedere "a mano" che per ogni valore $y \in \{-1,0,1,2,3,4\}$ esiste (almeno) un elemento $x \in A^*$ tale che $f(x)=y$. Infatti: sia $y=-1$: allora il punto $x=3$ appartiene ad A^* ed $f(x)=f(3)=-1$. Sia $y=0$: allora il punto $x=2$ appartiene ad A^* ed $f(x)=f(2)=0$. Se $y=1$, allora troviamo il punto $x=4$, che appartiene ad A^* ed è tale che $f(x)=f(4)=1$. Sia $y=2$: in corrispondenza, troviamo il punto $x=6$ che appartiene ad A^*, e si ha $f(x)=f(6)=2$. Se $y=3$, si trova il punto $x=5$, che appartiene ad A^* ed è tale che $f(x)=f(5)=3$. Infine, se prendiamo $y=4$, troviamo il punto $x=7$, che appartiene ad A^* ed è tale che $f(x)=f(7)=4$. Quindi $f : \{2,3,4,5,6,7\} \to \{-1,0,1,2,3,4\}$ è suriettiva. Notiamo che questo COLLEGAMENTO MOLTO PROFONDO TRA FUNZIONI SURIETTIVE E CODOMINIO SI PUÒ FARE CON OGNI FUNZIONE $f : A \longrightarrow B$ (similmente a come abbiamo fatto or ora). Cioè: OGNI FUNZIONE (DEL MONDO) $f : A \to B$ DIVENTA AUTOMATICAMENTE SURIETTIVA SE AL POSTO DI B CI METTIAMO IL CODOMINIO della f, CIOÈ $f(A)$ oppure $Im(f)$ (!!!!!)

N.B.: Il significato "etimologico" del simbolo $Im(f)$ è "l'insieme delle immagini della funzione f", cioè l'insieme di tutti e soli i valori y assunti dalla nostra f.

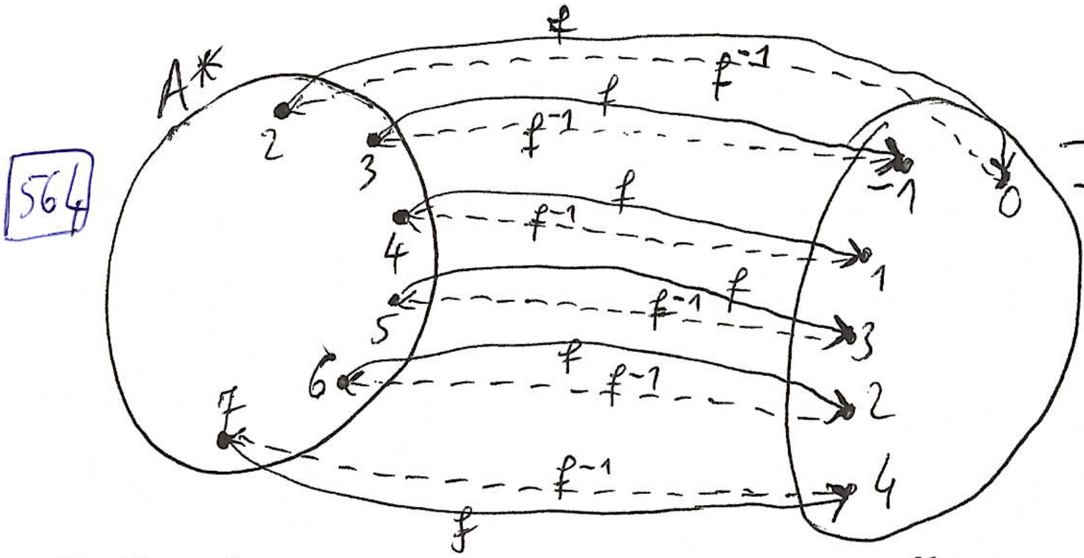
563 Sempre tenendo in mente la funzione di cui stavamo parlando nella pagina precedente, formuliamo ora la seguente

Definizione: Una funzione $f: A \to B$ si dice BIIETTIVA se è contemporaneamente <u>iniettiva</u> e <u>suriettiva</u>, cioè se per ogni $y \in B$ <u>esiste</u> <u>un</u> <u>unico</u> elemento $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

La nostra funzione di cui sopra $f: A^* = \{2,3,4,5,6,7\} \to B = \{-1,0,1,2,3,4\}$, è <u>biiettiva</u>, in quanto, come abbiamo visto, è iniettiva e suriettiva. Inoltre, in base a quello che abbiamo visto "a mano", abbiamo già visto che per ogni $y \in B$ esiste un <u>unico</u> elemento $x \in A$ tale che $f(x) = y$, perché (vedi pagina precedente) per ogni $y \in \{-1,0,1,2,3,4\}$ che abbiamo considerato, abbiamo trovato (nel calcolo che era stato fatto) <u>un solo</u> elemento $x \in A^*$ con $f(x) = y$, e quindi – di fatto – avevamo già visto nella pagina precedente che f è <u>BIIETTIVA</u> (!)

Ora, se f è biiettiva (in realtà, se e solo se f è biiettiva) è possibile definire la funzione inversa f^{-1} come segue:

<u>**Definizione**</u>: Sia $f: A \to B$ una funzione biiettiva. Si chiama <u>funzione</u> <u>inversa</u> di f quella funzione $f^{-1}: B \to A$, definita ponendo, per ogni $y \in B$, $f^{-1}(y) = x$, dove x è quell'(<u>unico</u>) elemento tale che $f(x) = y$.



Nella figura c'è quello che si chiama "diagramma a frecce" della funzione f e della sua inversa f^{-1}.
Per costruire, definire la funzione inversa f^{-1}, notiamo che IL DOMINIO DELLA FUNZIONE INVERSA COINCIDE CON IL CODOMINIO DELLA FUNZIONE DI PARTENZA; IL CODOMINIO DELLA FUNZIONE INVERSA COINCIDE CON IL DOMINIO DELLA FUNZIONE DI PARTENZA (quindi, nel passare alla funzione inversa, i ruoli del <u>dominio</u> e del <u>codominio</u> sono <u>scambiati</u>). Come si vede dal diagramma a frecce, la funzione inversa $f^{-1}: B \to A$ è definita ponendo: $f^{-1}(-1)=3$, $f^{-1}(0)=2$, $f^{-1}(1)=4$, $f^{-1}(2)=6$, $f^{-1}(3)=5$, $f^{-1}(4)=7$.
Notiamo che, sempre dal diagramma a frecce, si può vedere che due (qualsiasi) funzioni $f: A \to B$ ed $f^{-1}: B \to A$, che sono L'UNA LA FUNZIONE INVERSA DELL'ALTRA, hanno la seguente proprietà <u>fondamentale</u>:

$$\begin{cases} \text{- Comunque preso } x \in A \text{, si ha: } & f^{-1}(f(x)) = x \\ \text{- Comunque preso } y \in B \text{, si ha: } & f(f^{-1}(y)) = y \end{cases}$$

IMPORTANTISSIMO!!

Cioè: se prendiamo un qualsiasi punto $x \in A$ fissato arbitrariamente, "viaggiamo" con la f (raggiungendo il punto $f(x)=y$) e poi "torniamo

indietro" con la f^{-1} (a partire dal punto $f(x)=y$), SI RITORNA NEL PUNTO DI PARTENZA x. E inoltre, se prendiamo un qualunque punto $y \in B$ fissato arbitrariamente, "viaggiamo" con la f^{-1} (raggiungendo il punto $f^{-1}(y)=x$) e poi "torniamo indietro" con la f (a partire dal punto $x=f^{-1}(y)$), SI RITORNA NEL PUNTO DI PARTENZA y. Questa è una proprietà caratterizzante delle funzioni inverse. Inoltre notiamo che non è difficile vedere che LA FUNZIONE INVERSA È BIIETTIVA (senza dimostr.).
Ora vediamo alcune proprietà "grafiche", collegate con il diagramma a frecce.
Abbiamo costruito il diagramma a frecce di una funzione biiettiva insieme alla sua funzione inversa. Notiamo che una funzione $f: A \rightarrow B$ è biiettiva se e solo se, per ogni elemento $y \in B$, esiste un'unica freccia (che parte da un solo elemento $x \in A$) che arriva all'elemento y (come si vede dal diagramma a frecce che abbiamo costruito nella pagina precedente).
Ora, come si vede se una funzione è iniettiva o non iniettiva, e come si vede se una funzione è suriettiva o non suriettiva, attraverso i diagrammi a frecce? E poi come si vede se una relazione è una funzione o non è una funzione?
Facciamo ora qualche esempio.

Cominciamo con lo studiare questa relazione. Lanciamo due dadi distinti e non truccati. Siano $A = B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e definiamo una relazione R_0 associata ad A e B come segue

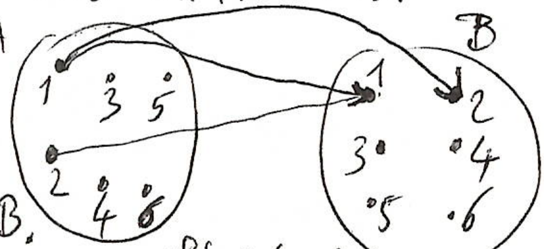
$$R_0 = \{(x,y) : x \in A,\ y \in B,\ x+y = 2 \text{ oppure } 3\}.$$

Quali sono gli elementi di $A \times B$ che appartengono a R_0? Sono esattamente $(1,1)$, $(1,2)$ e $(2,1)$, perché, nel lancio di 2 dadi, la somma 2 può essere espressa solo come $2 = 1+1$, mentre la somma 3 può essere espressa solo come $3 = 1+2$ oppure $3 = 2+1$ (sono due modi <u>diversi</u>, in quanto i dadi sono <u>distinti</u>). Quindi si ha

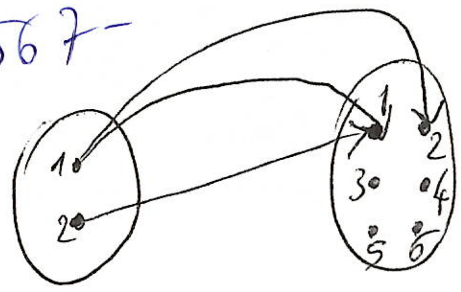
$$R_0 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

Vediamo il DIAGRAMMA A FRECCE ASSOCIATO a R.

Notiamo che dal punto $1 \in A$ "partono" due frecce: l'una va a finire sul punto $1 \in B$, e l'altra va a finire sul punto $2 \in B$.



Si vede che una relazione è una funzione se e solo se da ogni punto $x \in A$ "parte" una e una sola freccia che raggiunge un punto di B. Siccome dal punto $1 \in A$ partono due frecce, allora la nostra relazione <u>non è</u> una funzione. (Tra l'altro, dai punti $3, 4, 5, 6 \in A$ non parte <u>nessuna</u> freccia, quindi non si può parlare di una vera e propria funzione. Tra l'altro, se prendiamo $R_0 = \{(x,y) : x \in \{1,2\},\ y \in \{1,2,3,4,5,6\},\ x+y = 2 \text{ oppure } 3\} = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$,

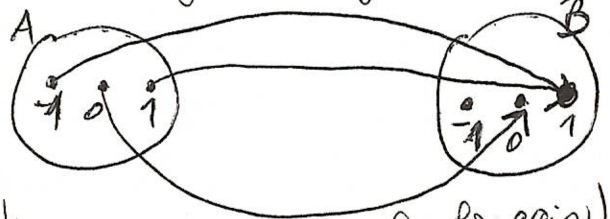


$R_6 = \{(x,y) : x \in \{1,2\}, y \in \{1,2,3,4,5,6\}, x+y = 2$ oppure $3\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$

è vero che da ogni elemento $\{1,2\}$ parte almeno una freccia, ma neanche qui siamo in presenza di una funzione, perché c'è sempre il fatto che dal punto 1 partono 2 frecce. (ripetiamo che, affinché la nostra relazione sia una funzione, occorre e basta che da ogni punto dell'insieme A (che questa volta è $\{1,2\}$) parta una e una sola freccia verso un elemento di B).

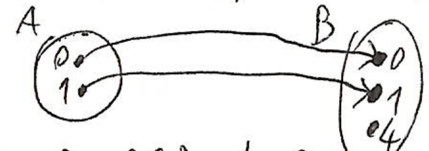
Ora vediamo che cosa corrisponde all'iniettività (e alla non iniettività) e alla suriettività (e alla non suriettività) in termini di frecce.

Siano $A = B = \{-1,0,1\}$, e sia $f : A \to B$ definita ponendo $f(x) = x^2$ per ogni $x \in A$. Questa volta f è una funzione. Si ha: $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ (da ogni



punto di A parte una e una sola freccia). Notiamo che f è non-iniettiva, perché esistono due punti distinti, -1 ed 1, tali che $f(-1) = f(1)$ (che è uguale a 1). Che cosa vuol dire? Che il punto 1 è raggiunto da due frecce. Quindi, in generale, si ha che UNA FUNZIONE $f : A \to B$ è NON-INIETTIVA SE E SOLO SE ESISTE ALMENO UN PUNTO $y \in B$ che è raggiunto da almeno 2 frecce.

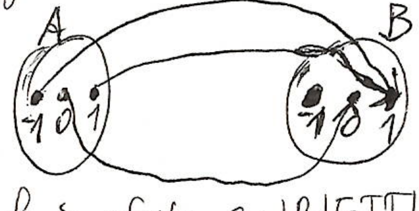
568 Invece una funzione $f: A \to B$ è INIETTIVA se e solo se PER OGNI ELEMENTO $y \in B$ si ha che y o è raggiunto da una sola freccia, oppure y non è raggiunto da nessuna freccia. Per esempio $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1, 4\}$, $f(x) = x^2$ per ogni $x \in A$,



Si ha $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Quindi non esiste nessuna coppia (a_1, a_2) di elementi distinti di A tali che $f(a_1) = f(a_2)$. Pertanto f è iniettiva.
Questo vuol dire che ogni elemento $y \in B$ non può essere raggiunto da due o più frecce, vale a dire che ogni elemento $y \in B$: o è raggiunto da una sola freccia, oppure non è raggiunto da nessuna freccia (cosa che può succedere).
Nel nostro caso, gli elementi 0 e 1 dell'insieme B sono raggiunti da una sola freccia, mentre l'elemento 4 dell'insieme B non è raggiunto da nessuna freccia.

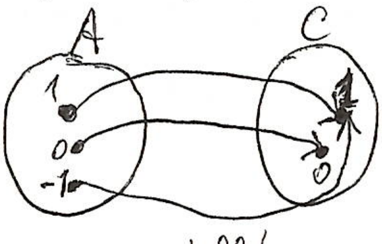
Inoltre, notiamo che una funzione $f: A \to B$ è SURIETTIVA se e solo se PER OGNI ELEMENTO $y \in B$ si ha che y è raggiunto da almeno una freccia, perché dire che per ogni $y \in B$ c'è almeno un punto $x \in A$ tale che $f(x) = y$ vuol dire che per ogni $y \in B$ c'è almeno una freccia che parte da un certo punto $x \in A$ e raggiunge il punto y. Quindi notiamo che una funzione $f: A \to B$ è NON SURIETTIVA se e solo se esiste almeno un elemento $y \in B$ che non è raggiunto da nessuna freccia (perché vuol dire che per nessun $x \in A$ si ha $f(x) = y$, cioè che y non è mai assunto dalla nostra funzione, cioè y non fa parte del codominio della nostra funzione, quindi B non coincide con il codominio di f). Nella figura all'inizio di questa pagina, la f è NON-SURIETTIVA perché il numero $4 \in B$ NON È RAGGIUNTO da nessuna freccia. Pertanto questa funzione è INIETTIVA ma NON SURIETTIVA.

Ora riprendiamo la funzione definita nel seguente modo: $A = B = \{-1, 0, 1\}$, $f: A \to B$ definita ponendo $f(x) = x^2$ per ogni $x \in A$. Ricordiamo che $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$



Abbiamo visto che f è NON-INIETTIVA. Inoltre, notiamo che f è NON-SURIETTIVA, perché $f(x) = x^2$ che è sempre una quantità positiva o nulla, e che quindi non può assumere mai il valore -1. Si vede anche dal diagramma a frecce che il punto $-1 \in B$ non è raggiunto da nessuna freccia, confermando la NON-SURIETTIVITÀ della funzione.

Se invece consideriamo il codominio di questa funzione f, si ha che questo insieme coincide con $\{0, 1\}$, perché la nostra funzione assume il valore 0, assume il valore 1, ma non assume altri valori. Quindi se prendiamo $A = \{-1, 0, 1\}$, $C = \{0, 1\}$, $f: A \to C$ definita ponendo $f(x) = x^2$ per ogni $x \in A$, quindi $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, si vede che f è non-iniettiva (perché $f(1) = f(-1) = 1$, e quindi il punto $1 \in C$ è raggiunto da due frecce), ma è SURIETTIVA, perché la nostra funzione assume sia il valore 0 che il valore 1, quindi assume ogni numero dell'insieme C, ed ogni elemento dell'insieme C viene raggiunto da almeno una freccia (nel nostro caso lo 0 è raggiunto da una sola freccia, mentre l'1 è raggiunto da due frecce).



Dunque, quest'ultimo esempio è un esempio di una funzione NON-INIETTIVA ma SURIETTIVA.

Infine, se prendiamo $D=\{2,3\}$, $E=\{4,9\}$, $f: D \to E$, $f(x)=x^2$ per ogni $x \in \{2,3\}$, allora si ha: $f(2)=4$, $f(3)=9$.

Ogni valore di E (cioè, sia il 4, sia il 9) viene assunto dalla nostra funzione, vale a dire ogni elemento di E viene raggiunto da (almeno) una freccia. Quindi f è <u>SURIETTIVA</u>. Ma, nel nostro caso, "(almeno) una freccia" è in realtà "una e una sola freccia", perché non esistono due punti distinti dell'insieme D, diciamo d_1, d_2, tali che $f(d_1)=f(d_2)$ (infatti il punto 4 è raggiunto solamente dalla freccia che parte dal punto 2, mentre il punto 9 è raggiunto solamente dalla freccia che parte dal punto 3). Questo vuol dire che f è <u>INIETTIVA</u>, e quindi anche <u>BIIETTIVA</u> (essendo già <u>SURIETTIVA</u>). Quindi esiste la funzione inversa $f^{-1}: E \to D$ (i ruoli del dominio e del codominio sono scambiati), che è definita ponendo $f^{-1}(4)=2$, $f^{-1}(9)=3$. Come detto precedentemente, si può notare che anche f^{-1} È UNA FUNZIONE BIIETTIVA.

Abbiamo visto quindi, anche con i <u>diagrammi a frecce</u>, che l'iniettività (o la non-iniettività) e la suriettività (o la non-suriettività) "<u>non sono parenti</u>", cioè che:

ESISTONO FUNZIONI INIETTIVE E SURIETTIVE;
ESISTONO FUNZIONI NON-INIETTIVE, MA SURIETTIVE;
ESISTONO FUNZIONI INIETTIVE, MA NON-SURIETTIVE;
ESISTONO FUNZIONI NON-INIETTIVE E NON-SURIETTIVE.

Alla luce degli esempi fatti, ci possiamo porre il seguente problema: quand'è che due funzioni sono uguali? Devono coincidere i rispettivi domini e insiemi dei valori e le rispettive leggi.

Si dice che due funzioni $f: A \to B$, $g: C \to D$ sono uguali se $A = C$, $B = D$ ed $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A$.
(dominio) (insieme dei valori) (leggi)

È fondamentale il fatto che non basta che le leggi coincidono, ma occorre anche che i rispettivi domini e i rispettivi insiemi dei valori siano uguali: infatti, nelle pagine precedenti, abbiamo dato l'esempio di 4 funzioni definite tutte e 4 con la legge $f(x) = x^2$ ma con domini e insiemi dei valori diversi, e abbiamo scoperto che le 4 funzioni sono del tutto una diversa dall'altra! infatti una è iniettiva e suriettiva, l'altra è iniettiva e non-suriettiva, l'altra ancora è non-iniettiva e suriettiva, e poi abbiamo anche una funzione non-iniettiva e non-suriettiva (!) Inoltre abbiamo visto che ogni funzione $f: A \to B$, non-suriettiva, può essere "trasformata" in una funzione suriettiva se al posto di B ci mettiamo il codominio di f, chiamiamolo $f(A)$ oppure $Im\, f$, mantenendo inalterati il dominio A e la legge. Quindi, in questo caso, le rispettive funzioni (la cui legge è indicata sempre con f) $f: A \to B$ ed $f: A \to f(A)$ NON SONO UGUALI: A coincide, le leggi coincidono, ma B ed $f(A)$ sono diversi, e quindi le due funzioni NON SONO UGUALI!! Tant'è vero che, per l'appunto, una delle due funzioni è non-suriettiva, mentre l'altra è suriettiva!!